Постановка задачи: найти приближенно корень ур-я $f(x)=0$ (1)

на $[a,b]$; $f\in C[a,b]$, $f(a)\cdot f(b)<0$.

- Если f строго монотонна, можно делением отрезка пополам. Погрешность на n-м шаге: $\frac{b-a}{2^n}$.

При дополнительных усл-ях на функцию — более тонкие методы.

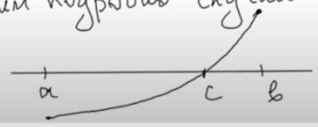
Идея: перейти к эквивалентному ур-ю

$$F(x)=x \qquad (2)$$

Пусть ф-ция f удовл-т условиям:
1) $f(a)\cdot f(b)<0$; 2) $f\in C^1[a,b]$;
3) $f'(x)\neq 0$ $\forall x\in[a,b]$; 4) f' монотонна на $[a,b]$

Таким образом, возможны 4 случая:
а) $f'(x)>0$ и $\nearrow$; б) $f'(x)>0$ и $\searrow$;
в) $f'(x)<0$ и $\nearrow$; г) $f'(x)<0$ и $\searrow$.

Рассмотрим подробно случай а). В этом случае f возр-т на $[a,b]$; $f(a)<0$, $f(b)>0$.



$$x_{n+1}=F(x_n)=x_n-\frac{f(x_n)(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)}=x_n+\frac{(\overset{=0}{f(c)}-f(x_n))(b-x_n)}{\underbrace{f(b)-f(x_n)}_{f(b)-f(c)+f(c)-f(x_n)}}=$$

$$\underset{\text{т. Лагранжа}}{=}x_n+\frac{\overset{>0}{f'(\xi_n)}(c-x_n)(b-x_n)}{\underset{\ge f'(\xi_n)}{f'(\eta)}(b-c)+f'(\xi_n)(c-x_n)}\le$$

$\xi_n\in(x_n;c)$, $\eta\in(c;b)$

$$\le x_n+\frac{\cancel{f'(\xi_n)}(c-x_n)\cancel{(b-x_n)}}{\cancel{f'(\xi_n)}\cancel{(b-c+c-x_n)}}=x_n+c-x_n=c.$$

Значит, если $x_n\le c$, то $x_{n+1}\le c$; $x_0=a\le c$ — верно.
(Если $x_n=c$, то $x_{n+1}=c$)

Далее, $x_{n+1}=x_n-\frac{\overset{<0}{f(x_n)}\overset{>0}{(b-x_n)}}{\underset{>0}{f(b)-f(x_n)}}>x_n$

Пусть $x_n<c$

$\boxed{\text{Д-ли, что } \{x_n\} \text{ монотонна и огр-на} \Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} x_n. \text{ Из леммы 1} \Rightarrow x_n\to c.}$ ч.т.д.

Замеч-е: случай г) ($f'<0$ и $\searrow$) рассм-ся аналогично;

в случаях б), в) нужно взять $F(x)=\begin{cases} x-\frac{f(x)(x-a)}{f(x)-f(a)}, & a<x\le b\\ a-\frac{f(a)}{f'(a)}, & x=a\end{cases}$

$x_0=b$

Опр. 1 Послед-ть $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ наз-ся __итерационной послед-тью__, построенной по ф-ции F, если все x_n лежат в области опред-я F ($x_n\in D(F)$, $n=0,1,\dots$) и (*) $x_n=F(x_{n-1})$, $n\in\mathbb{N}$.

Лемма 1. Пусть $F\in C[a,b]$; $x_n\in[a,b]$, $n=0,1,\dots$. Если $\exists\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=c$, то c — корень ур-я (2) (т.е. $c=F(c)$).

Д-во: Если $x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}c$, то $x_{n-1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}c$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty}F(x_{n-1})=F(c)$ (в силу непр-ти F на $[a,b]$; $c\in[a,b]$, т.к. $a\le x_n\le b$). Значит, $c=F(c)$ (переходим к пределу в (*)). ч.т.д.

Метод хорд

Положим $F(x):=\begin{cases} x-\frac{f(x)(b-x)}{f(b)-f(x)}, & a\le x<b\\ b-\frac{f(b)}{f'(b)}, & x=b\end{cases}$

Тогда $F\in C[a,b]$;

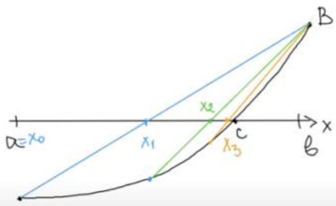
$F(x)=x \Leftrightarrow f(x)=0$

т.е. $\exists!\, c\in(a,b)$, т.ч. $f(c)=0$ и $F(c)=c$.

Т.1 Пусть $\{x_n\}$ — итерац-я посл-ть, построенная по ф-ции F; $x_0=a$. Тогда $\exists\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=c$, причем $f(c)=0$

Д-во: покажем по индукции, что $x_n\in[a,c]$, где c — корень ур-я $f(x)=0$, и $\{x_n\}$ не убывает.

Геометрический смысл метода хорд



Ур-е хорды, соединяющей точки $(x_n, f(x_n))$ и $(b,f(b))$:

$$\frac{x-x_n}{b-x_n}=\frac{y-f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}$$

$$y=0 \Leftrightarrow x=x_n-\frac{f(x_n)(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)}=F(x_n)=x_{n+1}$$

То есть x_{n+1} — абсцисса точки пересеч-я хорды с осью Ox

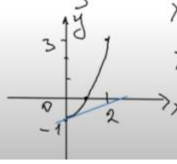
Оценка погрешности

$$f(x_n)=f(x_n)-\underbrace{f(c)}_{=0}=f'(\xi_n)(x_n-c)$$

$$\Rightarrow |x_n-c|=\left|\frac{f(x_n)}{f'(\xi_n)}\right|\le\frac{|f(x_n)|}{m},\quad m=\inf_{a\le x\le b}|f'(x)|$$

Пример

$f(x)=x^2-1$, $x\in[0,2]$



$x_0=2$ $\quad x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$x_1=2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$

$x_2=\frac{5}{4}-\frac{9/16}{\frac{5}{2}}=\frac{5}{4}-\frac{9}{40}=\frac{41}{40}$

....